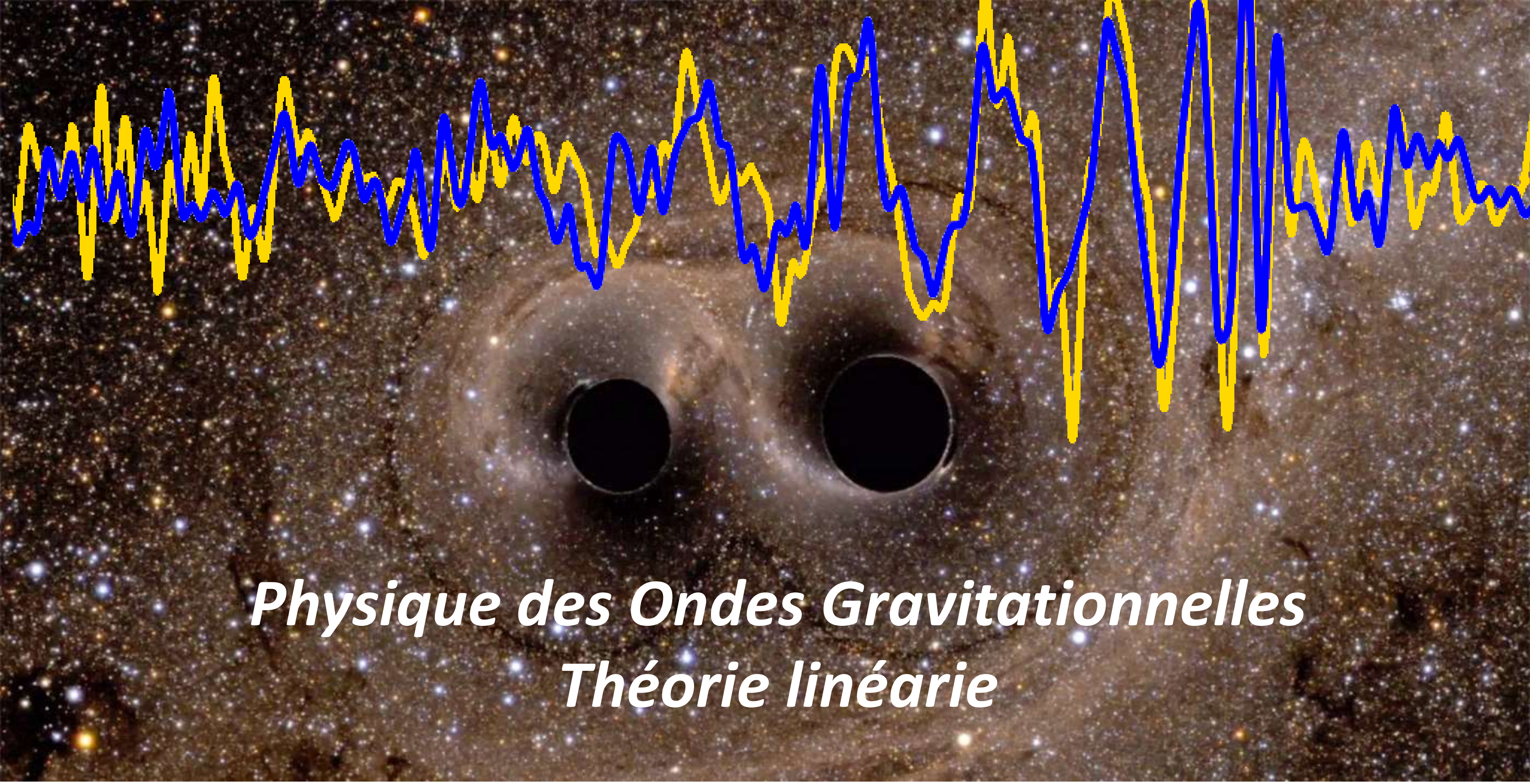


Physique des Ondes Gravitationnelles
Théorie linéarie

iLM
INSTITUT LUMIÈRE MATIÈRE

Gianpietro Cagnoli
gianpietro.cagnoli@univ-lyon1.fr

UCB Lyon 1

De l'Équation d'Einstein aux OG

- La linéarisation de l'Équation d'Einstein

Ricci's tensor $$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

$$\boxed{\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

$\Box = \partial_\alpha \partial^\alpha \qquad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \cdot \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$ and $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$

A false-friend equation…

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \partial_\beta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta}$$

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta}(\partial_\alpha g_{\delta\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\delta} - \partial_\delta g_{\alpha\beta})$$

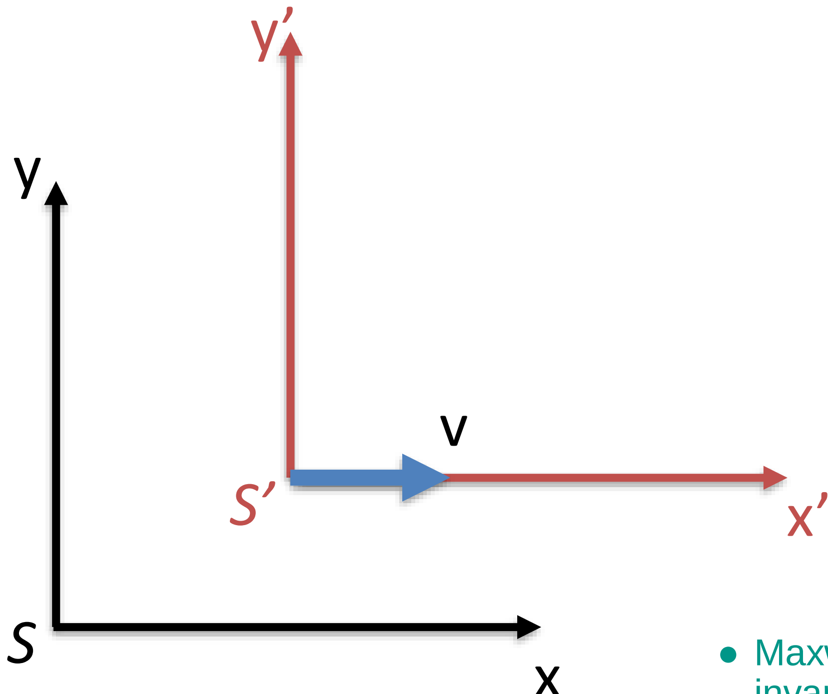
1)

Special relativity: Lorentz transformations

- Galileian transformations

$$t' = t$$
$$x' = x - v\,t$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

- Do not respect equivalence principle
- Maxwell equations not invariant
- Need a preferred frame of reference/medium for light propagation



- Lorentz transformations

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$
$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$\beta = \frac{v}{c} \leq 1$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1$$

- Maxwell equations are invariant
- Speed of light is the same in any frame

1)

Special relativity: spacetime interval

Given two spacetime events $A = (ct_a, x_a, y_a, z_a)$ and $B = (ct_b, x_b, y_b, z_b)$ and defining $\Delta(ct) = ct_b - ct_a$, $\Delta x = x_b - x_a$, etc...

$$
\begin{aligned}
\Delta s^2 \equiv& -\Delta(ct')^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = \\
&= -\gamma^2(\mathrm{c}\Delta t - \beta\Delta x)^2 + \gamma^2(\Delta x - \beta \mathrm{c}\Delta t)^2 + \Delta \mathrm{y}^2 + \Delta \mathrm{z}^2 = \\
&= \ \dots = -\mathrm{c}^2\Delta t^2\,\gamma^2(1-\beta^2) + \Delta x^2\,\gamma^2(1-\beta^2) + \Delta \mathrm{y}^2 + \Delta \mathrm{z}^2 = \\
&= -\Delta(ct)^2 + \Delta x^2 + \Delta \mathrm{y}^2 + \Delta \mathrm{z}^2
\end{aligned}
$$

Invariant!

$\Delta s^2 < 0$: spacelike interval
$\Delta s^2 = 0$: null interval
$\Delta s^2 > 0$: timelike interval

1)

Special relativity: the metric

Infinitesimal interval (line element)

$$\delta s^2 = -\delta(ct)^2 + \delta x^2 + \delta \mathrm{y}^2 + \delta \mathrm{z}^2$$

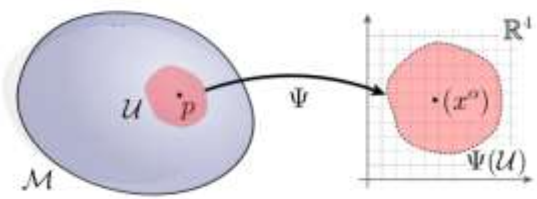
$$\delta s^2 = (\delta ct, \delta x, \delta y, \delta z)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta ct \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \delta x^a \, \eta_{ab} \delta x^b$$

Einstein's summation convention

1)

Curved spacetime: the ingredients

- **Space**



2)

- 4-D manifold $\mathcal{M}$
  - Set of points (space) that can be continuously parametrized
  - Dimension: number of parameters needed
  - Spacetime: continuous and differentiable
- The parameters are called coordinates:
  - Chart: coordinate system that maps a portion of $\mathcal{M}$ into a portion of R^4

    $$p \rightarrow (x^0, x^1, x^2, x^3) = x^a$$

  - Atlas: a collection of overlapping charts that cover $\mathcal{M}$

- **Metric**

- Specifies the distances between infinitesimally separated points
- Determines the local "geometry" of the manifold
  - It is a function of the point p
- (pseudo-)Riemannian geometry:

  $$ds^2 = g_{ab}(x)\, dx^a\, dx^b$$

  - $g_{ab}(x)$ can always be chosen to be symmetric (any antisymmetric part has no effect on ds^2)

1)

Propriétés de la métrique

- Pour un espace vectoriel V la métrique est une fonctionne $g : V \times V \to \mathbb{R}$ que:
  - g est bilinéaire
  - g est symétrique $g(v,w) = g(w,v) \to g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$
  - Non dégénéré: si $g(v,w) = 0 \quad \forall w \quad \to \quad v = 0$
  - In a basis $\{e\}_i$ the components are: $\boxed{g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu)}$
    therefore: $g(v,w) = g_{\mu\nu} v^\mu w^\mu$
  - Non dégénéré → inversible → l'inverse est $g^{\mu\nu}$
  - Loi de transformation après un changement $x^\mu \to x'^\mu$

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \quad \to g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}$$

Notation utilisé

- Métrique plan
  - ♦ $\eta_{\mu\nu} = (-,+,+,+) \rightarrow \eta^{\mu}{}_{\nu} = \mathbf{1}$
- Cordonnées
  - ♦ $x^{\mu} = (ct, x, y, z)$
- Dérivés
  - ♦ $\partial_{\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \rightarrow \partial^{\mu} = \left(-\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \partial^{\mu}\partial_{\mu} = \square$$

Scalars and Vectors

- **Scalar**
- Scalar field
  - It is any application:

    $$S : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

  that associates a real number $S(p)$ to any point $p \in \mathcal{M}$.
- Transformation rule
  - Under a coordinate transformation

    $$x^\alpha \to x'^\alpha(x)$$

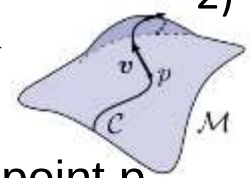
  a scalar field transforms as

  $$S'(x') = S(x)$$

- **Vector**
- A generic curve $\mathcal{C}$

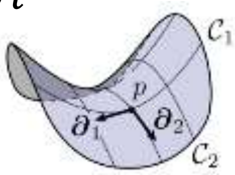
  $$x^\alpha = X^\alpha(\tau) \qquad \tau \in \mathbb{R}$$

2)



- The tangent vector
  - It is an operator of the point p that associate to every scalar field f

    $$\boldsymbol{v}(f) \equiv \left.\frac{df}{d\tau}\right|_{\mathcal{C}} = \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^\alpha}{\partial \tau}$$



- The basis vectors $\boldsymbol{\partial}_\alpha$ are the tangent vectors to $\mathcal{C}_\alpha$: $\boldsymbol{v} = v^\alpha \boldsymbol{\partial}_\alpha$
- Transformation rule

$$v'^\alpha(x') = \sum_{\beta=0}^{3} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} v^\beta(x) \equiv \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} v^\beta(x)$$

Que sont les $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$

- Les symboles de Christoffel servent à connecter les bases de vecteurs $\{e\}_i$ définis sur deux points différents de l'espace courbé
  - ♦ Γ a 3 indices parce que il y a 3 vecteurs: les 2 e et le déplacement δx

$$\delta \hat{e}_\alpha = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\, \hat{e}_\gamma\, \delta x^\beta \quad \rightarrow \quad \partial_\beta \hat{e}_\alpha = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\, \hat{e}_\gamma$$

($\hat{e}_\alpha$ est un vecteur: $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_N$ sont tous de vecteurs et N est la dimensionnalité de l'espace. Un vecteur $\vec{V}$ peut s'écrire comme $V^\alpha\, \hat{e}_\alpha$)

- Dont la dérivé covariant (D ou ∇) d'un vecteur:

vu que $\partial_\beta \vec{V} = \left(\partial_\beta V^\alpha\right)\hat{e}_\alpha + V^\alpha\left(\partial_\beta \hat{e}_\alpha\right)$ alors on défini:

$$\nabla_\beta V^\gamma = \partial_\beta V^\gamma + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} V^\alpha$$

3)

Que sont les $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}$, $R_{\mu\nu}$ et R

- Le tenseur de Riemann $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}$ sert à quantifier la non-commutativité de la dérivé d'un vecteur dans un espace courbé
  - ♦ Pour une manifold sans torsion $\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \leftrightarrow \partial_\beta \hat{e}_\alpha = \partial_\alpha \hat{e}_\beta$
    et $\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi = \nabla_\nu \nabla_\mu \Phi$ où Φ est un scalaire
  - ♦ Le commutateur $\left(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu\right)$ d'un vecteur $\vec{V}$ dois avoir 4 indices: 1 parce que il dois être proportionnel à $\vec{V}$ et 3 sont l'indices du commutateur sur $\vec{V}$:
    $\left(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu\right) V^\alpha = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} V^\beta$ ou $\left(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu\right) V_\alpha = -R^{\beta}{}_{\mu\nu\alpha} V_\beta$

3)

Que sont les $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}$, $R_{\mu\nu}$ et R

- Le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ sert à quantifier le changement d'un volume qui se déplace selon un courbe $\mathcal{C}(\lambda)$
  - ♦ Vu que on peut démontrer que
$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\nu\beta} x^{\alpha} x^{\beta} + O(x^3)$$
    alors le volume élémentaire est:
$$\sqrt{\det(g)} = \left(1 - \frac{1}{6} R_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}\right) \sqrt{\det(\eta)}$$
  - ♦ Lelong la courbe $\mathcal{C}(\lambda)$:
$$\frac{d g_{\mu\nu}}{d\lambda} = -2R_{\mu\nu}$$
    C'est intéressant de remplacer λ par le temps propre τ 4), 5)

Que sont les $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}$, $R_{\mu\nu}$ et R

- Le scalaire de Ricci R sert à quantifier la courbure de l'espace en considérant la surface d'une sphère
  - Pour un espace 3-D on a:

$$R = \lim_{\rho \to 0} \frac{18}{\rho^2}\left[1 - \frac{A(\rho)}{4\pi\rho^2}\right]$$

    où ρ est le rayon de la sphère et $A(\rho)$ est la surface de la sphère. Pour un espace 2-D le 18 devient 12 et le dénominateur devient $\pi\rho^2$

4)

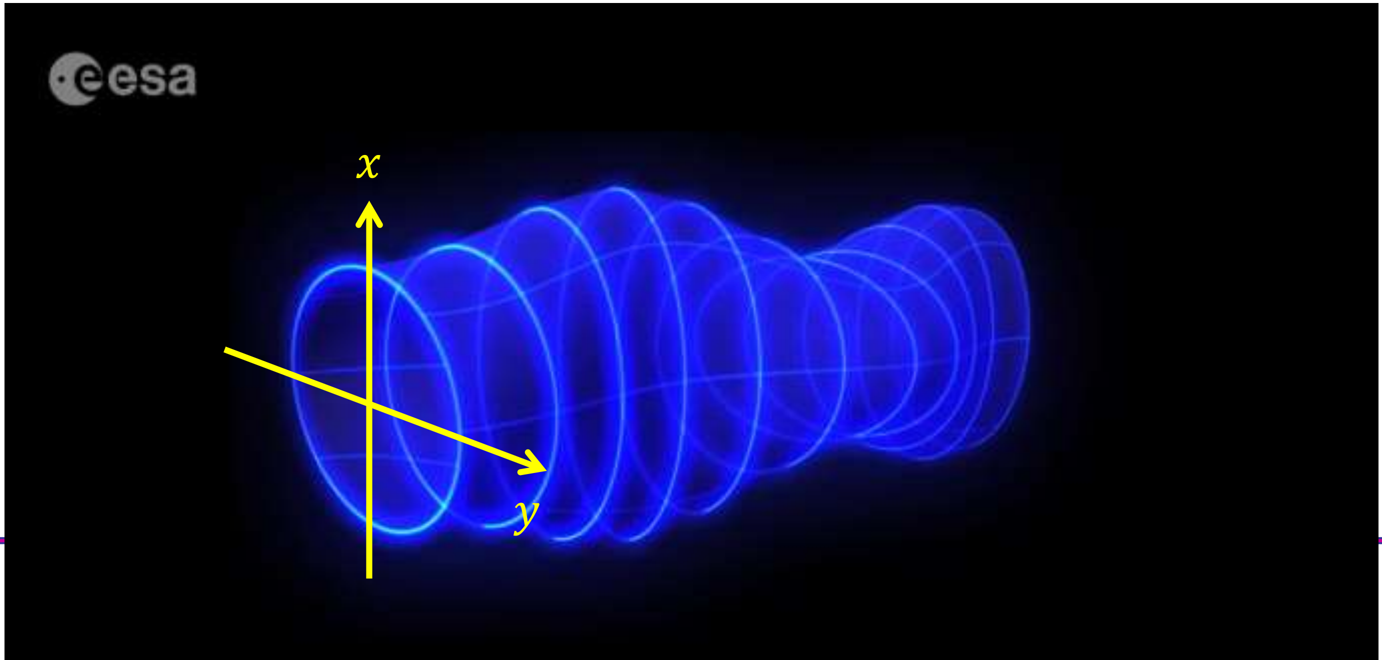
La solution de l'équation d'onde homogène

$$\boxed{\Box\,\bar{h}_{\mu\nu} = 0}$$

Propagation selon l'axe z

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \cos\left[\omega\,\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi\right] = \boldsymbol{e}_{\mu\nu} \cdot e^{ik_\alpha x^\alpha}$$

$$k^\alpha = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$$



Un operateur très utile: le tenseur Λ

- Pour une OG $h_{\mu\nu}$ hors de la source et dans la gauge de Lorentz:
  - $h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,lm} h_{lm}$
- Définition
  - $\Lambda_{ij,lm} = P_{il}P_{jm} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{lm}$
  - $P_{ij}(\hat{n}) = \delta_{ij} - n_i n_j$
- Si $\hat{n} = (0,0,1)$ (et donc $\vec{k} = (0,0,k)$)
  - $P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{lm} = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{ij}^{TT} = e_{lm} - \frac{a+b}{2}\mathbf{1}$

MM)

La solution TT gauge plus générique

$$h_{ab}(t,\boldsymbol{r}) = \sum_{A=+,\times} \int_{-\infty}^{+\infty} df \int dcos\theta \, d\varphi \;\; \tilde{h}_A(f,\theta,\varphi) \; e_{ab}^{A}(\theta,\varphi) \; e^{-2\pi i\, f\, (t-\frac{\hat{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{c}})}$$

- Les détails à retenir
  - ab indiquent les 2 indices des polarisations e_{ab}^{+} et $e_{ab}^{\times}$
  - TT n'est pas plus utilisé vu que ab indique le même concept
  - h_{ab} est réel, par contre $\tilde{h}_A$ est complexe
  - Les fréquences négatives indiquent que $\tilde{h}_A(-f) = \tilde{h}_A^{*}(f)$
  - Plusieurs OG viennent de différents (θ,φ) sont considérées
  - $\hat{n}$ est définis par (θ,φ)

MM)

La solution de l'équation avec la source

$$\boxed{\Box\, \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}\, T_{\mu\nu}}$$

- La solution se base sur les fonctions de Green

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -\frac{16\pi G}{c^4}\int d^4x'\, G(x-x')\cdot T_{\mu\nu}\,(x')$$

♦ De l'équation homogène:

$$G(x-x') = -\frac{1}{4\pi\left|\vec{x}-\overrightarrow{x'}\right|}\cdot \delta(\, x^0_{ret} - x'^0)$$

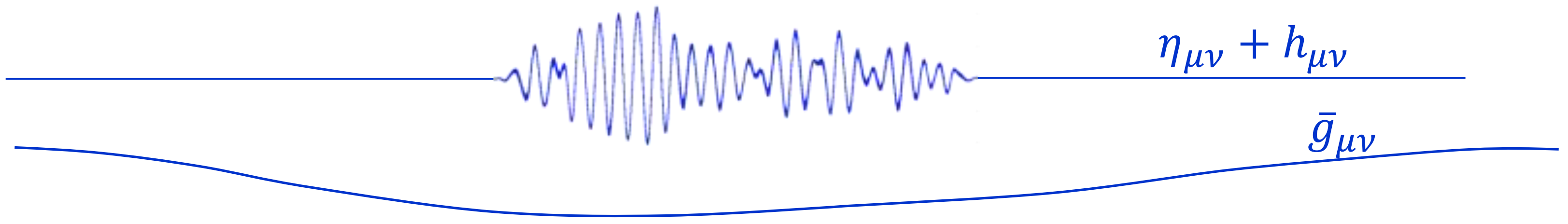
Et donc

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t,\vec{x}\,) = \frac{4G}{c^4}\int d^3x'\,\frac{1}{\left|\vec{x}-\overrightarrow{x'}\right|}\cdot T_{\mu\nu}\left(t' - \frac{\left|\vec{x}-\overrightarrow{x'}\right|}{c}, \overrightarrow{x'}\right)$$

MM)

Séparation entre ondes and background

- Les OG courbent l'éspace-temps
  - ♦ $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ est impossible de l'utiliser



  - ♦ Séparation entre échelle de temps ou de longueur d'onde $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$
- Les tenseurs ''effectifs'' $\langle A_{\mu\rho} \rangle$
  - ♦ Il s'agit d'un intégration sur plusieurs périodes de l'OG $\bar{A}_{\mu\rho} = \langle A_{\mu\rho} \rangle$

MM)

L'équation d'Einstein pour le background

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}\right)$$

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + \mathrm{R}_{\mu\nu}^{(1)} + \mathrm{R}_{\mu\nu}^{(2)} + O(h^3)$$

- Le tenseur énergie-impulsion $t_{\mu\nu}$ des OG est:

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G}\left\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^{(2)}\right\rangle =$$

After a long manipulaiton of the terms and considering integration by parts too

$$= \frac{c^4}{32\pi G}\left\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \cdot \partial_\nu h^{\alpha\beta}\right\rangle$$

This is invariant by coordinate transformations

$$t_{00} = \frac{c^2}{16\pi G}\left\langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2\right\rangle$$

MM)

Crédits

1) Giacomo Ciani, Università di Padova, cours doctorale
2) Auger G. and Plagnol E., 2017, *An Overview of Gravitational Waves*, World Scientific Publishing, ISBN 978-9-813-14175-9
3) Hobson M.P., Efstathiou G.P. and Lasenby A.N., 2006, General Relativity, An Introduction for Physicists, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-53639-4
4) http://arxiv.org/abs/gr-qc/0401099v1
5) https://physics.stackexchange.com/questions/297701/what-does-the-ricci-tensor-represent

MM) M. Maggiore's text book